はじめに

ここ数年間，京都大学の数学の入試問題は易問ばかりです．
方針も難しくないし，計算もそれ程複雑ではありません．
差がつきにくい問題ばかりで，学部によっては満点近くとらないといけないという状況にもなるでしょう．
しかしながら，そこは入試問題です．どこかでしっかりと差がつけられているのであります．
それはどこなのでしょう．

ちょっと考えれば判明しますね．

そうです．どんなに簡単な問題でも，状況を把握しているかどうか，方針や考え方が間違えていないか，調べ漏れがないか，計算が正確か，などの当たり前の事をちゃんと解答でアピールできているかどうかで差をつけられているのです．

差をつけられないように，むしろ他の受験生に差をつけるように，ちゃんとした解答を書く練習を過去問を通じてするのです．

それでは始めましょうか…

堺　義明

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

京都大学数学ＩＡⅡＢⅢ対策講座

目　　次

第１講　値の範囲 ―― p.4
第２講　確率 ―― p.12
第３講　数列 ―― p.20
第４講　「割り切る」問題 ―― p.26
第５講　平面図形 ―― p.36
第６講　ベクトル ―― p.46
第７講　空間図形 ―― p.56
第８講　指数対数 ―― p.64
第９講　数学Ⅱの微分積分 ―― p.72
第10講　数学Ⅲ　―その１― ―― p.80
第11講　数学Ⅲ　―その２― ―― p.88
第12講　数学Ⅲ　―その３― ―― p.96

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　値の範囲

1　実数 x，y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

《12 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 次の条件(＊)を満たす正の実数の組$(a,\ b)$の範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

(＊)　$\cos a\theta = \cos b\theta$ かつ $0 < \theta \leqq \pi$ となる θ がちょうど１つある．

《12 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　実数の定数 a，b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

で定める．すべての実数 x で不等式

$$f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2$$

が成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

《14 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4　a を 2 以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする．このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ．

《13 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

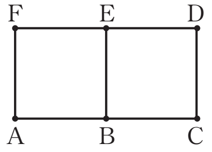
＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　確率

5　6個の点A，B，C，D，E，Fが右図のように長さ1の線分で結ばれているとする．各線分をそれぞれ独立に確率 $\frac{1}{2}$ で赤または黒で塗る．赤く塗られた線分だけを通って点Aから点Eに至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする．そのような経路がない場合は X を0とする．このとき，$n=0, 2, 4$ について，$X=n$ となる確率を求めよ．



《15京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

6　投げたときに表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標１の点に関して対称な点に石を移動する．

(1)　石が座標 x の点にあるとする．２回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．

(2)　石が原点にあるとする．n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ．

《13 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

7　さいころを n 回投げて出た目を順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする．さらに

$$Y_1=X_1, \qquad Y_k=X_k+\frac{1}{Y_{k-1}} \qquad (k=2,\ \cdots,\ n)$$

によって Y_1，Y_2，$\cdots$，Y_n を定める．

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ．《12 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

8　２つの関数を $f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく．$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1,\ 2,\ \cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める．このとき，$x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ．《15 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　数列

9　N を 2 以上の自然数とし，$a_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の性質(i)，(ii)をみたす数列とする．

(i)　$a_1=2^N-3$

(ii)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

a_n が偶数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$，

a_n が奇数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{2}$．

このときどのような自然数 M に対しても $\displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 2^{N+1}-N-5$ が成り立つことを示せ．

《13 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

10　n は 2 以上の整数であり，$\dfrac{1}{2} < a_j < 1\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n) > 1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ.　《11 京大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

11　次の問に答えよ．

(1)　n を正の整数，$a=2^n$ とする．3^a-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ．

(2)　m を正の偶数とする．3^m-1 が 2^m で割り切れるならば $m=2$ または $m=4$ であることを示せ．　《10 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講 「割り切る」問題

12 n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする．

(1) a と b は整数であることを示せ．

(2) a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ．《13 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

13　n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする．このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ．

《13 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

14　a，b，c，d，e を正の実数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．《15 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

15　自然数 a，b はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる．このような a，b の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ．《14 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

16 （1） $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ．

（2） $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする．このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ．《12 京大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　平面図形

17　x を正の実数とする．座標平面上の 3 点 A(0, 1)，B(0, 2)，P(x, x) をとり，△APB を考える．x の値が変化するとき，∠APB の最大値を求めよ．

《10 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

18　一辺の長さが１の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする．このとき $\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ．

《15 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

19　$1<a<2$ とする．3 辺の長さが $\sqrt{3}$，a，b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする．このとき a を用いて b を表せ．《10 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

20　点Oを中心とする正十角形において，A，Bを隣接する2つの頂点とする．線分OB上に$OP^2 = OB \cdot PB$を満たす点Pをとるとき，OP＝ABが成立することを示せ．

《10 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

21　△ABC は，条件 ∠B＝2∠A，BC＝1 を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする．このとき，cos ∠B を求めよ．《14 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　ベクトル

22　平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1：1 に内分する点を E，辺 BC を 2：1 に内分する点を F，辺 CD を 3：1 に内分する点を G とする．線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP：PQ を求めよ．

《13 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

23　正四面体 OABC において，点 P，Q，R をそれぞれ辺 OA，OB，OC 上にとる．ただし P，Q，R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする．△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ，QR，RP はそれぞれ 3 辺 AB，BC，CA に平行であることを証明せよ．

《12 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

24 四面体 ABCD において $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ はそれぞれ垂直であるとする．このとき，頂点 A，頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ．《10 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

25 四面体OABCにおいて，点Oから3点A，B，Cを含む平面に下ろした垂線とその平面の交点をHとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{7}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ を求めよ．　《11 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

26 座標空間における次の３つの直線 l，m，n を考える：

l は点 A(1，0，−2) を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である．

m は点 B(1，2，−3) を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である．

n は点 C(1，−1，0) を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である．

P を l 上の点として，P から m，n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする．このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ．

《14 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　空間図形

27 座標空間内で，O(0，0，0)，A(1，0，0)，B(1，1，0)，C(0，1，0)，D(0，0，1)，E(1，0，1)，F(1，1，1)，G(0，1，1) を頂点にもつ立方体を考える．この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ．

《10 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

28 xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える．点 Q が$(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 P$(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく．R の動く範囲を求め，図示せよ．

《15 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

29 xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点を持つことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ．

《11 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

30 空間内に四面体 ABCD を考える．このとき，4つの頂点 A，B，C，D を同時に通る球面が存在することを示せ．

《11 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　指数対数

31　x，y は $x\neq1$，$y\neq1$ をみたす正の数で，不等式

$$\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2)$$

をみたすとする．このとき x，y の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

《09 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

32　0 以上の整数を 10 進法で表すとき，次の問いに答えよ．ただし，0 は 0 桁の数と考えることにする．また n は正の整数とする．

(1)　各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数を考える．それらすべての整数の総和を T_n とする．T_n を n を用いて表せ．

(2)　各桁の数が 0，1，2 のいずれかである n 桁以下の整数を考える．それらすべての整数の総和を S_n とする．S_n が T_n の 15 倍以上になるのは，n がいくつ以上のときか．必要があれば，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.302$ および $0.477 < \log_{10} 3 < 0.478$ を用いてもよい．

《11 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

33　次の式

$$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　次の不等式

$$a_n{}^2-2a_n>10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であることは用いてよい．

《14 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

34　$2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか.

ただし，$0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ である.

《05 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　数学Ⅱの微分積分

35　α，β を実数とする．xy 平面内で，点 $(0,\ 3)$ を中心とする円 C と放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ が点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$ を共有し，さらに P における接線が一致している．このとき以下の問に答えよ．

(1)　α，β の値を求めよ．

(2)　円 C，放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

《13 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

36　実数 a が変化するとき，3 次関数 $y=x^3-4x^2+6x$ と直線 $y=x+a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか．a の値によって分類せよ．

《11 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

37　xy 平面上で，$y=x$ のグラフと $y=\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ．

《11 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

38　t を実数とする．$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ から接線を引く．

(1)　接線がちょうど１本だけ引けるような t の範囲を求めよ．

(2)　t が(1)で求めた範囲を動くとき，$\mathrm{P}(1,\ t)$ から C に引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ の取りうる範囲を求めよ．

《14 京大・文系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　数学Ⅲ ―その１―

39　α，β，γ は相異なる複素数で，

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$$

を満たすとする．このとき α，β，γ の表す複素平面上の 3 点を結んで得られる三角形はどのような三角形か.（ただし，複素平面を複素数平面ともいう.）

《05 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

40　複素数 α に対してその共役複素数を $\overline{\alpha}$ であらわす．α を実数ではない複素数とする．複素平面内の円 C が 1，-1，α を通るならば，C は $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ も通ることを示せ．

《04 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

41　次の各問に答えよ.

(1)　a が正の実数のとき $\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ.

(2)　定積分 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ.

《12 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

42

(1)　a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ.

(2)　$a_1=1$ として，$n=1,\ 2,\ \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ.

《15 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　数学Ⅲ ― その 2 ―

43　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ．ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい．

《13 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

44　xy 平面内で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1 : y=\sqrt{3}\log(1+x),\ C_2 : y=\sqrt{3}\log(1-x)$$

とそれぞれ点 A，点 B で接しているとする．さらに △PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする．このとき 3 つの曲線 C，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，2 つの曲線がある点で接するとは，その点を共有し，さらにその点において共通の接線をもつことである．

《13 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

45 双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第1象限にある部分と，原点Oを中心とする円の第1象限にある部分を，それぞれ C_1，C_2 とする．C_1 と C_2 は2つの異なる点A，Bで交わり，点Aにおける C_1 の接線 l と線分OAのなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする．このとき C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ．

《14 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

46 a を正の実数とする．座標平面において曲線 $y=\sin x\,(0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，曲線 $y=a\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする．このとき $S:T=3:1$ となるような a の値を求めよ．

《10 京大・理系》

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　数学Ⅲ ―その3―

47　2つの関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ のグラフの $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．ただし，$x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない．

《15 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

48 次の式で与えられる底面の半径が 2，高さが 1 の円柱 C を考える．

$$C=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 4,\ 0\leqq z\leqq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と 45° の角をなす平面のうち，点 $(0,\ 2,\ 1)$ を通るものを H とする．円柱 C を平面 H で二つに分けるとき，点 $(0,\ 2,\ 0)$ を含む方の体積を求めよ．

《08 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

49 n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる．各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする．どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする．このとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log p_n}{n}$ を求めよ．

《10 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

50　極方程式 $r=1+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ.

《09 京大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　値の範囲

1　実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ.

《12 京大・理系》

【答】 $-8-6\sqrt{2} \leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y \leqq 3$

【解説】 $x+y=t$, $xy=u$ とおくと，x と y は α の 2 次方程式 $\alpha^2-t\alpha+u=0$ の 2 つの実数解なので,

$$(-t)^2-4u \geqq 0 \iff t^2-4u \geqq 0 \quad \cdots\cdots①$$

このとき，$x^2+xy+y^2=6 \iff (x+y)^2-xy=6$ より $t^2-u=6$ なので

$$u=t^2-6 \quad \cdots\cdots②$$

②を①に代入すると $t^2-4(t^2-6) \geqq 0 \iff t^2 \leqq 8 \quad \therefore \quad -2\sqrt{2} \leqq t \leqq 2\sqrt{2}$

また

$$\begin{aligned} x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y &= xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y) \\ &= ut-t^2+t \\ &= (t^2-6)t-t^2+t \\ &= t^3-t^2-5t \end{aligned}$$

より，これを $f(t)$ とおくと $f'(t)=3t^2-2t-5=(3t-5)(t+1)$ なので $f(t)$ の増減は

t	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$-8-6\sqrt{2}$	↗	3	↘	$-\frac{175}{27}$	↗	$-8+6\sqrt{2}$

となる.

ここで $-\frac{175}{27}>-7$, $-8-6\sqrt{2}<-8$, $3-(-8+6\sqrt{2})=11-6\sqrt{2}=\sqrt{121}-\sqrt{72}>0$

より求める範囲は

$$\boldsymbol{-8-6\sqrt{2} \leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y \leqq 3}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　次の条件(＊)を満たす正の実数の組$(a,\ b)$の範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

（＊）　$\cos a\theta=\cos b\theta$ かつ $0<\theta\leqq\pi$ となる θ がちょうど１つある．

《12 京大・文系》

【答】 略

【解説】 $a=b$ とすると，$\cos a\theta=\cos b\theta \iff \cos a\theta=\cos a\theta$ となり，これを満たす θ がちょうど１つであることに反する．

よって $a\neq b$ である．このとき

$$\cos a\theta-\cos b\theta=-2\sin\frac{a+b}{2}\theta\sin\frac{a-b}{2}\theta=0$$

であるが，$a>b$ とすると

$$0<\frac{a+b}{2}\theta\leqq\frac{a+b}{2}\pi,\ 0<\frac{a-b}{2}\theta\leqq\frac{a-b}{2}\pi,\ \frac{a+b}{2}\theta>\frac{a-b}{2}\theta$$

より求める条件は

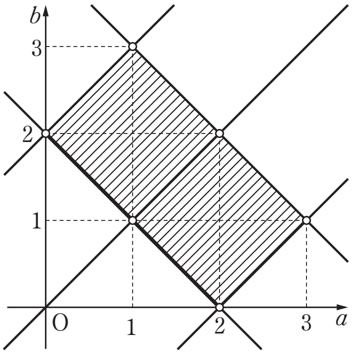
$$\frac{a-b}{2}\pi<\pi \text{ かつ } \pi\leqq\frac{a+b}{2}\pi<2\pi \iff a-b<2 \text{ かつ } 2\leqq a+b<4$$

$$\iff b>a-2 \text{ かつ } -a+2\leqq b<-a+4\ (b<a)$$

ここで，対称性より，$b>a$ のときの条件は

$$b-a<2 \text{ かつ } 2\leqq b+a<4 \iff b<a+2 \text{ かつ } -a+2\leqq b<-a+4\ (b>a)$$

以上より求める領域は



ただし，境界に関しては $b=-a+2\ (0<a<1)$ と $b=-a+2\ (1<a<2)$ を含み，$b=a$ と $b=a\pm2$ と $b=-a+4$ は含まない．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　実数の定数 a，b に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$$

で定める．すべての実数 x で不等式

$$f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2$$

が成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ．

《14 京大・理系》

【答】　略

【解説】

$$f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2 \iff (f(x)-2)(f(x)-1)(f(x)+1)\geqq 0$$
$$\iff -1\leqq f(x)\leqq 1,\ f(x)\geqq 2$$

である．

ここですべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2$ であるとすると，$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ に注意して

$$f(x)\geqq 2 \iff \frac{ax+b}{x^2+x+1}\geqq 2$$
$$\iff 2x^2+(2-a)x+2-b\leqq 0$$

であるが，x^2 の係数が正なので，十分大きな x に対して $2x^2+(2-a)x+2-b$ が正となり不適．

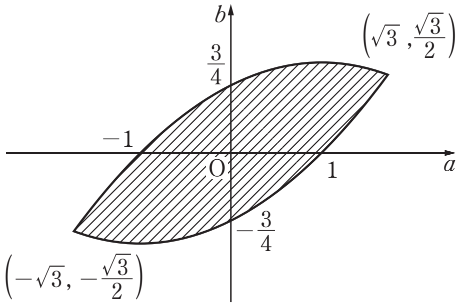
次に，すべての実数 x に対して $-1\leqq f(x)\leqq 1$ であるとすると

$$-1\leqq f(x)\leqq 1 \iff -1\leqq\frac{ax+b}{x^2+x+1}\leqq 1$$
$$\iff x^2+(a+1)x+b+1\geqq 0 \text{ かつ } x^2+(1-a)x+1-b\geqq 0$$

であるが，これがすべての x に対して成り立つ条件は

$$(a+1)^2-4(b+1)\leqq 0 \text{ かつ } (1-a)^2-4(1-b)\leqq 0$$
$$\iff b\geqq\frac{1}{4}(a+1)^2-1 \text{ かつ } b\leqq-\frac{1}{4}(a-1)^2+1$$

よって求める領域は境界を含む斜線部分．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4　a を 2 以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする．このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ．

《13 京大・文系》

【答】 $2\leqq a<2+2\sqrt{2}$

【解説】 $a=2$ のとき，$f(x)=(x+2)^2$ より

$f(f(x))>0 \iff f(x)<-2$ または $f(x)>-2$ であるが，$f(x)=(x+2)^2\geqq 0$ より $f(x)>-2$ がすべての実数 x について成り立つ．

$a>2$ のとき，$f(f(x))>0 \iff f(x)<-a$ または $f(x)>-2$ である．

$f(0)=2a>0$ より $f(x)<-a$ は $x=0$ について成立しないが，

$f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}+1\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a-1$ より $-\dfrac{a^2}{4}+a-1>-2$ であれば，$f(x)>-2$ はすべての x について成り立つことになる．

$$-\frac{a^2}{4}+a-1>-2 \iff a^2-4a-4<0$$

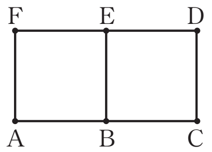
$$\iff 2<a<2+2\sqrt{2} \qquad (\because \quad a>2)$$

以上より求める条件は $\boldsymbol{2\leqq a<2+2\sqrt{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　確率

5　6個の点A，B，C，D，E，Fが右図のように長さ1の線分で結ばれているとする．各線分をそれぞれ独立に確率 $\frac{1}{2}$ で赤または黒で塗る．赤く塗られた線分だけを通って点Aから点Eに至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする．そのような経路がない場合は X を0とする．このとき，$n=0,\ 2,\ 4$ について，$X=n$ となる確率を求めよ．



《15京大・文系》

【答】　順に $\frac{69}{128}$，$\frac{7}{16}$，$\frac{3}{128}$

【解説】　$x=2$ となるとき，最短経路はA→F→EかA→B→Eとなる．AFとFEが共に赤である確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，ABとBEが共に赤である確率も同様に $\frac{1}{4}$．また，AF，FE，AB，BEのすべてが赤の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ より，$X=2$ となる確率は $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\boldsymbol{\frac{7}{16}}$．

$x=4$ となるとき，最短経路はA→B→C→D→Eとなる．AFとFEの少なくとも一方が黒の確率は $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$，ABが赤でなおかつBEが黒でBC，CD，DEがすべて赤の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$ なので，$X=4$ となる確率は $\frac{3}{4}\times\frac{1}{32}=\boldsymbol{\frac{3}{128}}$．

X の値は0または2または4のいずれかなので，$X=0$ となる確率は

$1-\frac{7}{16}-\frac{3}{128}=\boldsymbol{\frac{69}{128}}$．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

6 投げたときに表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する．数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標1の点に関して対称な点に石を移動する．

(1) 石が座標 x の点にあるとする．2回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ．

(2) 石が原点にあるとする．n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ．

《13京大・理系》

【答】 (1) $\dfrac{1}{2}$　(2) $\dfrac{2n}{4^n}$

【解説】 n 回硬貨を投げた後の石の座標を a_n で表すことにする．

このとき，①：$a_{n+1}=-a_n$ と②：$a_{n+1}=2-a_n$ がそれぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で採用されて，次の石の位置が決まることになる．

(1) 石が x にあるときに，次の2回の硬貨投げにより

(Ⅰ) ①①の場合は「$x \to -x \to -(-x)=x$」，

(Ⅱ) ①②の場合は「$x \to -x \to 2-(-x)=x+2$」，

(Ⅲ) ②①の場合は「$x \to 2-x \to -(2-x)=x-2$」，

(Ⅳ) ②②の場合は「$x \to 2-x \to 2-(2-x)=x$」

と変化する．

2回硬貨を投げて x にあるのは(Ⅰ)と(Ⅳ)の場合より，求める確率は $2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(2) (Ⅱ)，(Ⅲ)の確率はともに $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ である．

$2n$ 回硬貨を投げて，2回ずつセットで考えたとき，(Ⅰ)または(Ⅳ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)となる回数を順に p，q，r とすると，石が $2n-2$ となるので，

$$\begin{cases} p+q+r=n & \cdots③ \\ 0\times p+(+2)\times q+(-2)\times r=2n-2 & \cdots④ \\ p\geqq 0,\ q\geqq 0,\ r\geqq 0 & \cdots⑤ \end{cases}$$

③と $p\geqq 0$ より $q+r\leqq n$，これに④より得られる $q=r+n-1$ を代入すると

$(r+n-1)+r\leqq n \iff r\leqq\dfrac{1}{2}$ となるので，$r\geqq 0$ より $r=0$ よって $q=n-1$．

以上より $p=1$，$q=n-1$，$r=0$(これらは⑤を満たす)に決まる．

よって求める確率は

$${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\frac{2n}{4^n}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

7　さいころを n 回投げて出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする．さらに

$$Y_1=X_1,\quad Y_k=X_k+\frac{1}{Y_{k-1}}\quad (k=2,\ \cdots,\ n)$$

によって Y_1，Y_2，…，Y_n を定める．

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_n\leqq 1+\sqrt{3}$$

となる確率 p_n を求めよ．《12 京大・理系》

【答】 $p_n=\dfrac{1}{5}\left\{1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$

【解説】 帰納的に $Y_n\geqq 1$ である．

以下，$k=2$，3，… で考える．

(Ⅰ) $1\leqq Y_{k-1}<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ のとき　$\sqrt{3}-1<\dfrac{1}{Y_{k-1}}\leqq 1$ より

$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}<\right)\sqrt{3}<1+\dfrac{1}{Y_{k-1}}\leqq 2(<1+\sqrt{3})$ であり，

2 以上の整数 m に対して $(1+\sqrt{3}\leqq)\sqrt{3}+m-1<m+\dfrac{1}{Y_{k-1}}$ である．

(Ⅱ) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\leqq Y_{k-1}\leqq 1+\sqrt{3}$ のとき　$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\leqq\dfrac{1}{Y_{k-1}}\leqq\sqrt{3}-1$ より

$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\leqq 1+\dfrac{1}{Y_{k-1}}\leqq\sqrt{3}\,(<1+\sqrt{3})$，$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}<\right)\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}\leqq 2+\dfrac{1}{Y_{k-1}}\leqq 1+\sqrt{3}$ であり，

3 以上の整数 m に対して $(1+\sqrt{3}<)\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}+m\leqq m+\dfrac{1}{Y_{k-1}}$ である．

(Ⅲ) $Y_{k-1}>1+\sqrt{3}$ のとき　$0<\dfrac{1}{Y_{k-1}}<\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ より

$1+\dfrac{1}{Y_{k-1}}<\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$，$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}<\right)2<2+\dfrac{1}{Y_{k-1}}<\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}(<1+\sqrt{3})$ であり，

3 以上の整数 m に対して $(1+\sqrt{3}<)m<m+\dfrac{1}{Y_{k-1}}$ である．

$Y_n<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ となる確率を l_n，$Y_n>1+\sqrt{3}$ となる確率を h_n とすると，(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)より，

$$p_{n+1}=\frac{1}{6}\times l_n+\frac{2}{6}\times p_n+\frac{1}{6}\times h_n$$

が成り立つが，$l_n+p_n+h_n=1 \iff l_n+h_n=1-p_n$ であることより

$$p_{n+1}=\frac{1}{6}(1-p_n)+\frac{2}{6}p_n \iff p_{n+1}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}$$

$$\iff p_{n+1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}\left(p_n-\frac{1}{5}\right)$$

より $p_n-\dfrac{1}{5}=\left(p_1-\dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ここで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_1 \leqq 1+\sqrt{3}$ となるのは $X_1=2$ のときのみなので，$p_1=\dfrac{1}{6}$.

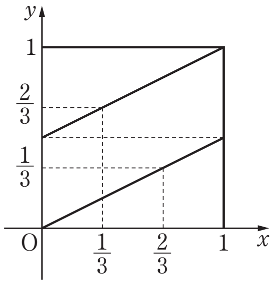
よって $\boldsymbol{p_n}=\dfrac{1}{5}+\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{5}\right)\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}\left\{1-\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n}\right\}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

8　2つの関数を $f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく．$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1,\ 2,\ \cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める．このとき，$x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ．《15京大・理系》

【答】　$P_n=\dfrac{1}{3}\left\{2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$

【解説】　$y=f_0(x)$ と $y=f_1(x)$ のグラフ(右図)より



$0<x_{n-1}<\dfrac{1}{3}$ のとき，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $0<x_n<\dfrac{1}{6}$ または $\dfrac{1}{2}<x_n<\dfrac{2}{3}$ となる．

$\dfrac{1}{3}<x_{n-1}<\dfrac{2}{3}$ のとき，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $\dfrac{1}{6}<x_n<\dfrac{1}{3}$ または $\dfrac{2}{3}<x_n<\dfrac{5}{6}$ となる．

$\dfrac{2}{3}<x_{n-1}<1$ のとき，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $\dfrac{1}{3}<x_n<\dfrac{1}{2}$ または $\dfrac{5}{6}<x_n<1$ となる．

　また，$x_0=\dfrac{1}{2}$ より，帰納的に $x_n(n\geqq 0)$ は $0,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ 1$ となることはない．

　ここで，$0<x_n<\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{3}<x_n<\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{2}{3}<x_n<1$ となる確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とすると，

$$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\times a_n+\dfrac{1}{2}\times b_n+0\times c_n & \cdots① \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{2}\times a_n+0\times b_n+\dfrac{1}{2}\times c_n & \cdots② \\ c_{n+1}=0\times a_n+\dfrac{1}{2}\times b_n+\dfrac{1}{2}\times c_n & \cdots③ \end{cases}$$

が成立する．このとき $a_n+b_n+c_n=1 \iff a_n+c_n=1-b_n$ であることより②は

$$\begin{aligned} b_{n+1}=\frac{1}{2}(1-b_n) &\iff b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2} \\ &\iff b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right) \\ &\therefore\ b_n-\frac{1}{3}=\left(b_0-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

となる．ここで $x_0=\dfrac{1}{2}$ より $b_0=1$ なので $b_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

　また，③－①より $c_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(c_n-a_n)$ なので $c_n-a_n=(c_0-a_0)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ となるが，$b_0=1$ より $a_0=c_0=0$ なので $c_n-a_n=0$ ゆえに $c_n=a_n$.

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

この結果と $a_n+b_n+c_n=1$ より $a_n=c_n=\dfrac{1-b_n}{2}$.

よって $\boldsymbol{P_n}=a_n+b_n=\dfrac{1+b_n}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\left\{2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　数列

9　N を 2 以上の自然数とし，$a_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の性質(i)，(ii)をみたす数列とする．

(i)　$a_1=2^N-3$

(ii)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

a_n が偶数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$，

a_n が奇数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{2}$．

このときどのような自然数 M に対しても $\displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 2^{N+1}-N-5$ が成り立つことを示せ．

《13 京大・理系》

【答】　略

【解説】　$N=2$ のとき

$a_1=2^2-3=1$ より $a_2=\dfrac{a_1-1}{2}=0$ よって $n\geqq 2$ に対して $a_n=0$．ゆえに $\displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 1$

$2^{2+1}-2-5=1$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 2^{N+1}-N-5$ が成り立つ．

$N\geqq 3$ のとき

$a_1=2^N-3$ より $a_2=\dfrac{a_1-1}{2}=2^{N-1}-2$，$a_3=\dfrac{a_2}{2}=2^{N-2}-1$

ここで正の整数 m に対し，2^m-1 は奇数だから，3 以上の整数 k に対して $a_k=2^m-1$ の形のとき，$a_{k+1}=\dfrac{a_k-1}{2}=2^{m-1}-1$ なので，$m-1\geqq 1$ つまり $m\geqq 2$ のとき，$2^{m-1}-1$ は奇数となるので，$a_l=2^{N+1-l}-1(l=3,\ \cdots,\ N)$ となる．

このとき，$a_N=2^1-1=1$ より，$a_{N+1}=0$．以降帰納的に $a_n=0(n\geqq N+1)$．ゆえに

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{M}a_n&\leqq(2^N-3)+(2^{N-1}-2)+(2^{N-2}-1)+\cdots+(2^1-1)\\&=\frac{2(2^N-1)}{2-1}-3-2-1\cdot(N-2)\\&=2^{N+1}-N-5\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 2^{N+1}-N-5$ が成り立つ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

10　n は 2 以上の整数であり，$\frac{1}{2}<a_j<1(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ.　《11 京大・理系》

【答】 略

【解説】 $n=2$ のとき

$$(1-a_1)(1-a_2)-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)\right\}=a_2\left(a_1-\frac{1}{2}\right)>0$$

より与式は成立する.

$n=k(\geqq 2)$ のとき

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)$$

の成立を仮定すると，

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})>\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}(1-a_{k+1})$$

が成立するが，

$$\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}(1-a_{k+1})-\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)\right\}$$

$$=a_{k+1}\left\{\frac{1}{2^k}-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}$$

$$>a_{k+1}\left\{\frac{1}{2^k}-1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}\qquad\left(\because\ \ a_j>\frac{1}{2}(j=1,\ 2,\ \cdots)\right)$$

$$=a_{k+1}\left\{\frac{1}{2^k}-1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=0$$

よって，$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$ となり

$n=k+1$ のときにも与式は成立するので，数学的帰納法により，2 以上のすべての自然数 n に対して与式が成立することが示された.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

11 次の問に答えよ．

(1) n を正の整数，$a=2^n$ とする．3^a-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ．

(2) m を正の偶数とする．3^m-1 が 2^m で割り切れるならば $m=2$ または $m=4$ であることを示せ．《10 京大・理系》

【答】 (1) 略　(2) 略

【解説】 (1) $n=1$ のとき，$a=2^1=2$ より $3^a-1=3^2-1=8=2^3$ であるが，これは 2^3 で割り切れるが，2^4 では割り切れない．

ここで $n=k(\geqq 1)$ のとき，$3^{2^k}-1=2^{k+2}\times M(M$ は正の奇数$)$ と表せるとすると，

$$\begin{aligned}3^{2^{k+1}}-1&=3^{2\cdot 2^k}-1\\&=(3^{2^k})^2-1\\&=(2^{k+2}\times M+1)^2-1\\&=(2^{k+2})^2M^2+2\cdot 2^{k+2}\times M\\&=2^{2k+4}M^2+2^{k+3}\times M\\&=2^{k+3}(2^{k+1}M^2+M)\end{aligned}$$

となるが，$k\geqq 1$ より 2^{k+1} は偶数，つまり $2^{k+1}M^2+M$ は奇数なので，$2^{k+3}(2^{k+1}M^2+M)$ は 2^{k+3} で割り切れるが，2^{k+4} で割り切れない．

以上より，数学的帰納法により題意は示された．

(2) m は正の偶数より $m=2^n\times M$ (n は正の整数，M は正の奇数) と表せる．このとき，

$$\begin{aligned}3^m-1&=3^{2^n\times M}-1\\&=(3^{2^n})^M-1\\&=(3^{2^n}-1)\{(3^{2^n})^{M-1}+\cdots+3^{2^n}+1\}\end{aligned}$$

ここで(1)により $3^{2^n}-1$ は 2^{n+2} で割り切れて 2^{n+3} で割り切れなく，$(3^{2^n})^{M-1}+\cdots+3^{2^n}+1$ は奇数の M 項の和なので奇数になるから，3^m-1 は 2^{n+2} で割り切れて 2^{n+3} で割り切れないといえる．

このとき 3^m-1 は 2^m で割り切れるので $m\leqq n+2$ となる．

$$m\leqq n+2 \iff 2^n\times M\leqq n+2$$

であるが，$M\geqq 3$ とすると，$2^n>n$ より $2^n\times M\geqq 3\cdot 2^n>n+2$ なので不適．よって $M=1$．

このとき $n+2\geqq 2^n\times 1\geqq 2n$ より $n\leqq 2$

$n=1$ のとき $m=2^1\times 1=2$，$n=2$ のとき $m=2^2\times 1=4$

よって $m=2$ または $m=4$ に限る．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　「割り切る」問題

12　n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする．

(1)　a と b は整数であることを示せ．

(2)　a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ．　《13 京大・文系》

【答】 (1)　略　　(2)　略

【解説】 (1)　x^n を $(x-k)(x-k-1)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とおくと

$$x^n=(x-k)(x-k-1)Q(x)+ax+b$$

と立式できるので，$x=k$ と $x=k+1$ を代入することで

$$k^n=ak+b \quad \cdots①, \qquad (k+1)^n=a(k+1)+b \quad \cdots②$$

を得る．この 2 式より $a=(k+1)^n-k^n$，$b=(k+1)k^n-k(k+1)^n$ となるが，これらは整数である．

(2)　a と b をともに割り切る素数が存在すると仮定して，その素数を p とすると，$a=\alpha p$，$b=\beta p$（α と β は整数）と表せるので，①と②より

$$k^n=\alpha pk+\beta p=p(\alpha k+\beta), \qquad (k+1)^n=\alpha p(k+1)+\beta p=p\{\alpha(k+1)+\beta\}$$

となる．ここで，k と $k+1$ は整数で，k^n と $(k+1)^n$ はともに素数 p の倍数なので，k と $k+1$ はともに p の倍数．つまり整数 l と m を用いて

$$k=lp, \qquad k+1=mp$$

と表せるが，2 式の差をとることより $1=p(m-l)$ となるので，$p=\pm1$ を得るが，これは p が素数であることに矛盾する．

よって a と b をともに割り切る素数は存在しない．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

13　n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする．このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ．
《13 京大・理系》

【答】 略

【解説】 整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割ったときの商を $Q_n(x)$，余りを a_nx+b_n とすると，

$x^1=(x^2-2x-1)\cdot 0+1\cdot x+0$ より $a_1=1$，$b_1=0$ …①である．

ここで $x^{n+1}=(x^2-2x-1)Q_{n+1}(x)+a_{n+1}x+b_{n+1}$ であるが

$$\begin{aligned}x^{n+1}&=x\cdot x^n\\&=x\{(x^2-2x-1)Q_n(x)+a_nx+b_n\}\\&=(x^2-2x-1)xQ_n(x)+a_nx^2+b_nx\\&=(x^2-2x-1)(xQ_n(x)+a_n)+(2a_n+b_n)x+a_n\end{aligned}$$

より $a_{n+1}=2a_n+b_n$ …②，$b_{n+1}=a_n$ …③を得る．

①，②，③より a_n，$b_n(n=1,\ 2,\ \cdots)$ は帰納的に整数となる．

次に①より，$n=1$ のとき a_n と b_n をともに割り切る素数は存在しない．

そこで $n=k(\geqq 1)$ のとき a_k と b_k をともに割り切る素数は存在しないことを仮定して，a_{k+1} と b_{k+1} をともに割り切る素数が p だとすると，$a_{k+1}=\alpha p$，$b_{k+1}=\beta p$（α と β は整数）と表せるが，②，③より $2a_k+b_k=\alpha p$，$a_k=\beta p$ となるので，これらより $a_k=\beta p$，$b_k=(\alpha-2\beta)p$ となり，a_k と b_k をともに割り切る素数は存在しないことに矛盾．よって a_{k+1} と b_{k+1} をともに割り切る素数は存在しない．

ゆえに $n=k+1$ のときにも a_n と b_n をともに割り切る素数は存在しないことが示されたので，数学的帰納法により任意の自然数 n について a_n と b_n をともに割り切る素数は存在しないことが示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

14　a，b，c，d，e を正の実数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える．すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする．このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ．《15 京大・理系》

【答】 略

【解説】 $f(x)=g(x)\left(\dfrac{a}{d}x+\dfrac{bd-ae}{d^2}\right)+\dfrac{cd^2-bde+ae^2}{d^2}$ より $p=\dfrac{a}{d}$，$q=\dfrac{bd-ae}{d^2}$，$r=\dfrac{cd^2-bde+ae^2}{d^2}$ とおくと，$f(x)=g(x)(px+q)+r$ と表せるので，示すべきは $r=0$ である．

ここで $f(n)=g(n)(pn+q)+r$ であるが，d，e，n は正より $g(n)=dn+e>0$ なので $\dfrac{f(n)}{g(n)}=pn+q+\dfrac{r}{g(n)}$ を得る．

このとき

$$\frac{f(n+2)}{g(n+2)}-2\times\frac{f(n+1)}{g(n+1)}+\frac{f(n)}{g(n)}=r\left(\frac{1}{g(n+2)}-\frac{2}{g(n+1)}+\frac{1}{g(n)}\right)$$
$$=r\times\frac{2d^2}{g(n+2)g(n+1)g(n)}$$

は任意の正の整数 n に対して整数になるが，

$$g(n+2)g(n+1)g(n)=(dn+e)(dn+d+e)(dn+2d+e)>(dn)^3$$

より $0\leqq|r|\times\dfrac{2d^2}{g(n+2)g(n+1)g(n)}\leqq\dfrac{2|r|}{dn^3}$ となるので，$n^3>\dfrac{2|r|}{d}$ を満たす整数 n に対しては $\dfrac{2|r|}{dn^3}<1$ となるから $r\times\dfrac{2d^2}{g(n+2)g(n+1)g(n)}=0$ に決まる．$2d^2\neq0$ より $r=0$ となるので，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることが示された．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

15　自然数 a，b はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる．このような a，b の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ．《14 京大・理系》

【答】 $(a,\ b)=(13,\ 14),\ (14,\ 13)$，最小値は 365

【解説】 $(a+b)^3=(a^3+b^3)+3ab(a+b)$ で，a^3+b^3 と $3ab(a+b)$ はともに 3 の倍数より $(a+b)^3$ は 3 の倍数．よって整数 k を用いて $a+b=3k$ と表せる．

このとき $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=(3k)^3-3ab\cdot 3k=9k(3k^2-ab)$ は 81 の倍数であり，$3k^2$ は 3 の倍数だが ab は 3 の倍数ではないので，$3k^2-ab$ は 3 の倍数ではない．よって $k=9N$（N は整数）と表せる．

このとき $a+b=3k=27N$ であるが，$b=27N-a$ なので，

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=a^2+(27N-a)^2\\&=2a^2-54Na+729N^2\\&=2\left(a-\frac{27}{2}N\right)^2+\frac{729}{2}N^2\end{aligned}$$

$N=1$ とすると $a^2+b^2=2\left(a-\dfrac{27}{2}\right)^2+\dfrac{729}{2}$ より，$a=13,\ 14$ のとき最小値 $13^2+14^2=365$ をとる．

$N\geqq 2$ とすると $\dfrac{729}{2}N^2\geqq 1458>365$ となり最小値が 365 以下となることはない．

以上より，$\boldsymbol{(a,\ b)=(13,\ 14),\ (14,\ 13)}$ のとき a^2+b^2 は**最小値 365** をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

16 (1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ．
(2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする．このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ．《12 京大・理系》

【答】 (1) 略　(2) 略

【解説】 (1) $\sqrt[3]{2}$ は実数である．

ここで $\sqrt[3]{2}=\dfrac{m}{l}$ (l，m は自然数で互いに素) であると仮定すると，

$2=\dfrac{m^3}{l^3} \iff m^3=2l^3$

となり，$2l^3$ は偶数だから，m^3 つまり m は偶数．このとき自然数 k を用いて $m=2k$ と表せるが $m^3=2l^3 \iff (2k)^3=2l^3$ より $l^3=4k^3$ となるので，l^3 つまり l は偶数．

ゆえに m と l はともに偶数となるが，これは l と m が互いに素にあることに矛盾．

よって $\sqrt[3]{2}$ は有理数ではない実数，つまり無理数である．

(2) $\sqrt[3]{2}=\alpha$ とおき，$P(x)$ を x^3-2 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを px^2+qx+r とすると

$$P(x)=(x^3-2)Q(x)+px^2+qx+r$$

が成り立つ．$P(x)$ は有理数を係数としていて x^3-2 も有理数係数なので，$Q(x)$ も有理数係数，p，q，r も有理数である．

このとき $x=\alpha$ を代入すると $\alpha^3-2=0$，$P(\alpha)=0$ より $P(\alpha)=p\alpha^2+q\alpha+r=0$ である．

ここで $p^2(\alpha^3-2)=(p\alpha^2+q\alpha+r)(p\alpha-q)+(q^2-pr)\alpha+(qr-2p^2)$ なので，
$\alpha^3-2=p\alpha^2+q\alpha+r=0$ を代入することで $(q^2-pr)\alpha+(qr-2p^2)=0$ を得る．

$q^2-pr\neq 0$ とすると $\alpha=-\dfrac{qr-2p^2}{q^2-pr}$ となり，(1)より α は無理数，p，q，r は有理数より $-\dfrac{qr-2p^2}{q^2-pr}$ は有理数なので矛盾．

よって $q^2-pr=0$ …①，ゆえに $qr-2p^2=0$ …②である．

ここで $p\neq 0$ であれば，①より $r=\dfrac{q^2}{p}$ とでき，これを②へ代入して整理すると $q^3=2p^3$ となり，p と q は実数より $q=p\alpha$ つまり $\alpha=\dfrac{q}{p}$ となる．これは α は無理数，$\dfrac{q}{p}$ は有理数なので矛盾．よって $p=0$ である．これと①より $q=0$，更に $p\alpha^2+q\alpha+r=0$ より $r=0$．
以上より $p=q=r=0$ なので，px^2+qx+r は恒等的に 0，つまり $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることが示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　平面図形

17　x を正の実数とする．座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$，$\mathrm{P}(x,\ x)$ をとり，$\triangle\mathrm{APB}$ を考える．x の値が変化するとき，$\angle\mathrm{APB}$ の最大値を求めよ．

《10 京大・理系》

【答】 $\dfrac{\pi}{4}$

【解説】 $\triangle\mathrm{APB}$ の外接円を C とし，C の半径を R とする．

このとき，$\angle\mathrm{APB}$ は C の弧 AB に対する円周角である．

ここで，弦 AB が一定なので，半径 R が減少すれば中心角は増加して，それにともない円周角も増加する．

点 P は直線 $y=x$ 上を動くので，C が $y=x$ と共有点をもちながら半径が最小になるものを考えたときの円周角が求める最大値である．つまり C と $y=x$ が接する場合を考えて，その接点を P ととればよい．

このとき，方べきの定理より $\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}=\mathrm{OP}^2$ が成り立ち，$\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OB}=2$ より $\mathrm{OP}=\sqrt{2}$．

よって $\mathrm{P}(1,\ 1)$．このとき $\triangle\mathrm{APB}$ は直角二等辺三角形より求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

18 一辺の長さが1の正四面体ABCDにおいて，Pを辺ABの中点とし，点Qが辺AC上を動くとする．このとき $\cos\angle PDQ$ の最大値を求めよ．

《15京大・理系》

【答】 $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

【解説】 $AQ=t$ とおくと，点Qは辺AC上より $0\leqq t\leqq 1$ である．

PはABの中点より $AP=\dfrac{1}{2}$ であることと，$\angle DAP=\angle PAQ=\angle QAD=\dfrac{\pi}{3}$ であることより，△DAP，△PAQ，△QADに余弦定理を用いると，

$$PD^2=AP^2+AD^2-2\times AP\times AD\times\cos\angle DAP$$
$$PQ^2=AP^2+AQ^2-2\times AP\times AQ\times\cos\angle PAQ$$
$$QD^2=AQ^2+AD^2-2\times AQ\times AD\times\cos\angle QAD$$

より $PD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$PQ=\dfrac{\sqrt{4t^2-2t+1}}{2}$，$QD=\sqrt{t^2-t+1}$ を得る．

ここで△PDQに余弦定理を用いると

$$\begin{aligned}\cos\angle PDQ&=\frac{PD^2+QD^2-PQ^2}{2\times PD\times QD}\\&=\frac{\frac{3}{4}+(t^2-t+1)-\left(t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\right)}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{t^2-t+1}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\sqrt{1+\frac{8-5t}{t^2-t+1}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{6}\times\sqrt{1+\cfrac{1}{\frac{8-5t}{25}+\frac{49}{25(8-5t)}-\frac{11}{25}}}\end{aligned}$$

となる．

$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$\dfrac{8-5t}{25}>0$，$\dfrac{49}{25(8-5t)}>0$ なので，相加平均と相乗平均の関係より

$$\frac{8-5t}{25}+\frac{49}{25(8-5t)}\geqq 2\sqrt{\frac{8-5t}{25}\times\frac{49}{25(8-5t)}}\left(=\frac{14}{25}\right)$$

が成り立つ．等号成立は $\dfrac{8-5t}{25}=\dfrac{49}{25(8-5t)}$ つまり $8-5t=7$

∴　$t=\dfrac{1}{5}$ のときで，これは $0\leqq t\leqq 1$ をみたす．

よって求める最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times\sqrt{1+\cfrac{1}{\frac{14}{25}-\frac{11}{25}}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

19　$1<a<2$ とする．3辺の長さが $\sqrt{3}$，a，b である鋭角三角形の外接円の半径が1であるとする．このとき a を用いて b を表せ．《10京大・理系》

【答】 $b=\dfrac{\sqrt{12-3a^2}+a}{2}$

【解説】 長さが a の辺の対角の大きさを α，長さが b の辺の対角の大きさを β とすると，正弦定理より

$$2\times1=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}$$

が成り立つので，$\sin\alpha=\dfrac{a}{2}$，$\sin\beta=\dfrac{b}{2}$，$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を得る．

ここで，長さ $\sqrt{3}$ の対角の大きさが鋭角より $0<\pi-(\alpha+\beta)<\dfrac{\pi}{2}$ つまり $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$ なので，$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $\alpha+\beta=\dfrac{2}{3}\pi$.

よって

$$\begin{aligned}\frac{b}{2}&=\sin\beta\\&=\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\alpha\right)\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\left(-\frac{1}{2}\right)\sin\alpha\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\end{aligned}$$

ゆえに $\boldsymbol{b=\dfrac{\sqrt{12-3a^2}+a}{2}}$.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

20 点Oを中心とする正十角形において，A，Bを隣接する2つの頂点とする．線分OB上に$OP^2=OB\cdot PB$を満たす点Pをとるとき，$OP=AB$が成立することを示せ．

《10京大・文系》

【答】 略

【解説】 $OB=r$，$OP=t$とおくと，$PB=r-t$なので

$$OP^2=OB\cdot PB \iff t^2=r(r-t)$$
$$\iff t^2+rt-r^2=0$$

ここで$r>0$，$t>0$より$t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}r$となる．

また$\triangle OAB$に余弦定理を用いると，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{5}$，$OA=OB=r$より

$$\begin{aligned}AB^2&=OA^2+OB^2-2\times OA\times OB\times\cos\frac{\pi}{5}\\&=r^2+r^2-2\cdot r\cdot r\cos\frac{\pi}{5}\\&=2r^2\left(1-\cos\frac{\pi}{5}\right)\\&=4r^2\sin^2\frac{\pi}{10}\end{aligned}$$

より$AB=2r\sin\dfrac{\pi}{10}$を得る．

ここで$\sin\dfrac{\pi}{10}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{10}\right)=\cos\dfrac{2}{5}\pi$であるが，$\theta=\dfrac{2}{5}\pi$とおくと，$5\theta=2\pi$より

$$\cos 3\theta=\cos(2\pi-2\theta)=\cos 2\theta$$

より

$$4\cos^3\theta-3\cos\theta=2\cos^2\theta-1 \iff (\cos\theta-1)(4\cos^2\theta+2\cos\theta-1)=0$$

となるが，$0<\cos\theta=\cos\dfrac{2}{5}\pi<1$より$\cos\dfrac{2}{5}\pi=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$を得るので，$AB=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}r$を得る．

よって$OP=AB$が示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

21	△ABC は，条件 ∠B＝2∠A，BC＝1 を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする．このとき，cos ∠B を求めよ．《14 京大・理系》

【答】 $\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$

【解説】 AB＝c，CA＝b，∠A＝θ とおく．

BC＝1，∠B＝2θ より ∠C＝$\pi-3\theta$ なので，正弦定理より，

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{c}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{b}{\sin 2\theta}$$

となるので，$b=\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$，$c=\dfrac{\sin(\pi-3\theta)}{\sin\theta}$ より $b=2\cos\theta$，$c=3-4\sin^2\theta$ を得る．

面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}bc\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot(3-4\sin^2\theta)\cdot\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\sin 2\theta(1+2\cos 2\theta)\end{aligned}$$

となるが，$\cos 2\theta=t$ とおくと $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\,(1+2t)=\dfrac{1}{2}\sqrt{(1-t^2)(1+2t)^2}$ より

$f(t)=(1-t^2)(1+2t)^2$ とおくと，$f(t)=-4t^4-4t^3+3t^2+4t+1$ より

$f'(t)=-2(2t+1)(4t^2+t-2)$ となる．

ここで $\pi-3\theta>0$ より $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$，ゆえに $0<2\theta<\dfrac{2}{3}\pi$．$\cos 2\theta=t$ と置いたので

$-\dfrac{1}{2}<t<1$ だから $f(t)$ の増減は

t	$-\dfrac{1}{2}$	…	$\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}$	…	1
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗	最大	↘	

となる．

∠B＝2θ より $t=\cos$ ∠B なので，求める値は cos ∠B＝$\boldsymbol{\dfrac{-1+\sqrt{33}}{8}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　ベクトル

22 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を 1：1 に内分する点を E，辺 BC を 2：1 に内分する点を F，辺 CD を 3：1 に内分する点を G とする．線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC の交点を Q とするとき，比 AP：PQ を求めよ．《13 京大・理系》

【答】 19：3

【解説】 ABCD は平行四辺形より $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ である．

辺 AB を 1：1 に内分する点が E より $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$,

辺 BC を 2：1 に内分する点が F より $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$,

辺 CD を 3：1 に内分する点が G より $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{4}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と表せる．

ここで，P は線分 CE 上より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+t\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\left(1-\dfrac{1}{2}t\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,(0\leqq t\leqq 1)$ と表せ，

また P は線分 FG 上より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{AF}}+u\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\left(1-\dfrac{3}{4}u\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{u+2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,(0\leqq u\leqq 1)$ と表せる．

よって $1-\dfrac{1}{2}t=1-\dfrac{3}{4}u$ かつ $1-t=\dfrac{u+2}{3}$ $\iff$ $t=\dfrac{3}{11}$，$u=\dfrac{2}{11}$（これらは $0\leqq t\leqq 1$ と $0\leqq u\leqq 1$ を満たす）を得るので $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{19}{22}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{8}{11}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ となる．

ここで，Q は直線 AP 上より，実数 k を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{19}{22}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{8}{11}k\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と表せ，また Q は辺 BC 上より $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,(0\leqq l\leqq 1)$ と表せるので，$\dfrac{19}{22}k=1$ かつ $\dfrac{8}{11}k=l$ $\iff$ $k=\dfrac{22}{19}$，$l=\dfrac{16}{19}$（これは $0\leqq l\leqq 1$ を満たす）となる．

よって AP：PQ $=1:(k-1)=$ **19：3**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

23 正四面体 OABC において，点 P，Q，R をそれぞれ辺 OA，OB，OC 上にとる．ただし P，Q，R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする．△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ，QR，RP はそれぞれ 3 辺 AB，BC，CA に平行であることを証明せよ．

《12 京大・理系》

【答】 略

【解説】 正四面体の一辺の長さを $l(>0)$ とすると，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=l$ であり，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ より $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{l^2}{2}$，同様に $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{l^2}{2}$ である．

0 より大きく 1 より小さい 3 つの実数 α，β，γ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表せる．

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\beta^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\alpha\beta\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\alpha^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=l^2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

同様に $|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|^2=l^2(\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2)$，$|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|^2=l^2(\gamma^2-\gamma\alpha+\alpha^2)$ を得る．

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|$ より

$$\begin{aligned} l^2(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=l^2(\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2) &\iff \alpha^2-\alpha\beta=-\beta\gamma+\gamma^2 \\ &\iff (\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)=0 \\ &\iff \alpha=\gamma \text{ または } \beta=\alpha+\gamma \quad \cdots① \end{aligned}$$

となる．

$|\overrightarrow{\mathrm{QR}}|=|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|$ より同様に $\beta=\alpha$ または $\gamma=\beta+\alpha$　…②を得る．

ここで $\alpha=\gamma$ かつ $\gamma=\beta+\alpha$ とすると $\beta=0$ となり，$\beta=\alpha+\gamma$ かつ $\beta=\alpha$ とすると $\gamma=0$ となり，$\beta=\alpha+\gamma$ かつ $\gamma=\beta+\alpha$ とすると $\alpha=0$ となるので，いずれも α，β，γ は正であることに不適．

よって①，②より $\alpha=\gamma$ かつ $\beta=\alpha$ つまり $\alpha=\beta=\gamma$ となる．

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ となり，3 辺 PQ，QR，RP はそれぞれ 3 辺 AB，BC，CA に平行であることが示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

24 四面体 ABCD において $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ はそれぞれ垂直であるとする．このとき，頂点 A，頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ．《10 京大・理系》

【答】 略

【解説】 M は CD の中点より $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$ である．

$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ が垂直より $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=-\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ が垂直より $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が垂直より $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ を得る．

以上より $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2$ となる．

このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2)=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$$

であり $|\overrightarrow{\mathrm{AM}}||\overrightarrow{\mathrm{BM}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|\neq0$ より AM と CD，BM と CD が垂直であること，つまり A，B，M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することが示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

25 四面体OABCにおいて，点Oから3点A，B，Cを含む平面に下ろした垂線とその平面の交点をHとする．$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$，$|\overrightarrow{OA}|=2$，$|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=3$，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{7}$のとき，$|\overrightarrow{OH}|$を求めよ．《11京大・文系》

【答】 $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$

【解説】 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$ より $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$．これと，$|\overrightarrow{OA}|=2$，$|\overrightarrow{OB}|=3$，$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=7$ より
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=3$ となる．

Hは3点A，B，Cを含む平面上の点より $\overrightarrow{OH}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$ と表せる．ただし，α，β，γ は実数で $\alpha+\beta+\gamma=1$ …①を満たす．

ここで，OHが3点A，B，Cを含む平面と垂直なので，

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ かつ $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ であるので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OA}|^2)\alpha+(|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\beta+(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})\gamma\\&=-\alpha+6\beta-3\gamma=0\quad\cdots②\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\\&=(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-|\overrightarrow{OA}|^2)\alpha+(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})\beta+(|\overrightarrow{OC}|^2-\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})\gamma\\&=-\alpha-3\beta+6\gamma=0\quad\cdots③\end{aligned}$$

①，②，③より $\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\beta=\dfrac{1}{5}$，$\gamma=\dfrac{1}{5}$．

よって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OH}|^2&=|\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}|^2\\&=\alpha^2|\overrightarrow{OA}|^2+\beta^2|\overrightarrow{OB}|^2+\gamma^2|\overrightarrow{OC}|^2+2\alpha\beta\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\beta\gamma\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2\gamma\alpha\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}\\&=\frac{18}{5}\end{aligned}$$

より $|\overrightarrow{OH}|=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{10}}{5}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

26　座標空間における次の３つの直線 l, m, n を考える：

l は点 A(1, 0, −2) を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である．

m は点 B(1, 2, −3) を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である．

n は点 C(1, −1, 0) を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である．

P を l 上の点として，P から m, n へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする．このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ．

《14 京大・理系》

【答】　P(1, 0, −2), $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ の最小値は 7

【解説】　実数 p, q, r を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\vec{u}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+q\vec{v}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+r\vec{w}$ と表せる．

ここで $\mathrm{PQ}\perp m$ より $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\vec{v}-p\vec{u})\cdot\vec{v}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}+q|\vec{v}|^2-p\vec{u}\cdot\vec{v}=0$　…①

また $\mathrm{PR}\perp n$ より同様に $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{w}+r|\vec{w}|^2-p\vec{u}\cdot\vec{w}=0$　…②を得る．

このとき

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\vec{v}-p\vec{u})\\&=q\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-p\vec{u})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\vec{v}-p\vec{u})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-p\vec{u})\\&=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-p\vec{u})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-p\vec{u})+q(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}-p\vec{u}\cdot\vec{v})\end{aligned}$$

ここで①より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}-p\vec{u}\cdot\vec{v}=-q|\vec{v}|^2$ なので $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}-p\vec{u}|^2-q^2|\vec{v}|^2$　…③となる．

同様に $|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}-p\vec{u}|^2-r^2|\vec{w}|^2$　…④である．

ここで $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 2,\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(0,\ -1,\ 2)$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, $\vec{u}\cdot\vec{w}=3$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{v}=-3$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{w}=0$ なので，

$$① \iff -3+3q=0 \qquad \therefore\ q=1$$

$$② \iff 6r-3p=0 \qquad \therefore\ r=\frac{1}{2}p$$

更に $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{u}=3$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{u}=-3$ と③と④より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-2p\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{u}+p^2|\vec{u}|^2-q^2|\vec{v}|^2\\&=6p^2-6p+2\\|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-2p\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\vec{u}+p^2|\vec{u}|^2-r^2|\vec{w}|^2\\&=\frac{9}{2}p^2+6p+5\end{aligned}$$

となるので，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2=\dfrac{21}{2}p^2+7$ となり，

$p=0$ つまり **P(1, 0, −2)** のとき $\mathbf{PQ^2+PR^2}$ の最小値は **7**.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　空間図形

27 座標空間内で，O(0，0，0)，A(1，0，0)，B(1，1，0)，C(0，1，0)，D(0，0，1)，E(1，0，1)，F(1，1，1)，G(0，1，1) を頂点にもつ立方体を考える．この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ．

《10 京大・理系》

【答】 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

【解説】 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}=0$ で $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{OF}}|\neq 0$ より A から OF に下ろした垂線の足は P.

同様に $\mathrm{Q}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$ とおくことにより，E から OF に下ろした垂線の足が Q であることがわかる.

次に，$\mathrm{S}(1,\ 0,\ s)\ (0\leqq s\leqq 1)$ とおき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{\sqrt{3}k+1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{SR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\sqrt{3}k-s=0$ となるような s は $s=\sqrt{3}k$ なので，このとき，S から OF に下ろした垂線の足は R となり，$\overrightarrow{\mathrm{SR}}=\left(\dfrac{\sqrt{3}k-2}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}k+1}{3},\ \dfrac{-2\sqrt{3}k+1}{3}\right)$ より $|\overrightarrow{\mathrm{SR}}|^2=2k^2-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}k+\dfrac{2}{3}$ である．また，$0\leqq s\leqq 1$ より $0\leqq k\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ なので求める体積は

$$
\begin{aligned}
&|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2\pi\times|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\times\frac{1}{3}+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\pi|\overrightarrow{\mathrm{SR}}|^2\,dk+|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}|^2\pi\times|\overrightarrow{\mathrm{QF}}|\times\frac{1}{3}\\
=\ &\frac{2}{3}\pi\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{3}+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\pi\left(2k^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}k+\frac{2}{3}\right)dk+\frac{2}{3}\pi\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{3}\\
=\ &\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi+\pi\left[\frac{2}{3}k^3-\frac{\sqrt{3}}{3}k^2+\frac{2}{3}k\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\\
=\ &\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}
\end{aligned}
$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

28 xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える．点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく．R の動く範囲を求め，図示せよ．

《15 京大・文系》

【答】 略

【解説】 点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点なので，

$\mathrm{Q}(p,\ q,\ r)$（ただし $p^2+q^2+(r-1)^2=1$ かつ $r\neq 2$）と表せる．

R は $z=0$ 上の点より $\mathrm{R}(X,\ Y,\ 0)$ とおくと，Q は直線 PR 上の点より実数 t を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OR}}\\ &= ((X-1)t+1,\ Yt,\ -2t+2)\end{aligned}$$

と表せるので，$p^2+q^2+(r-1)^2=1$ より

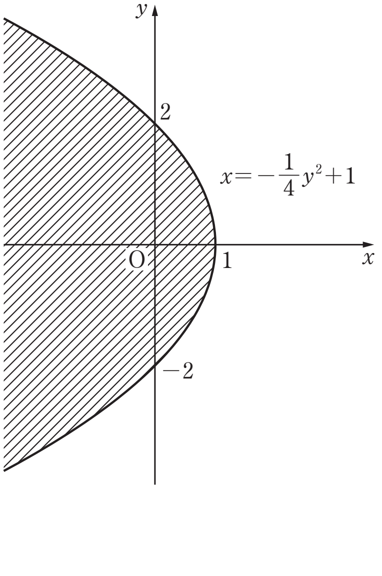
$\{(X-1)t+1\}^2+(Yt)^2+(-2t+1)^2=1 \iff \{(X-1)^2+Y^2+4\}t^2+2(X-3)t+1=0$ …①

ここで，①は $t=0$ を解にもたないので $r=-2t+2\neq 2$ を満たす．

よって①が実数解をもつ条件を考えると，

$$(X-3)^2-\{(X-1)^2+Y^2+4\}\geqq 0 \iff X\leqq -\frac{1}{4}Y^2+1$$

より $x\leqq -\dfrac{1}{4}y^2+1$ が R の領域で，図示すると下図（境界を含む）のようになる．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

29 xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点を持つことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ．

《11 京大・理系》

【答】 $\dfrac{50}{27} \leqq xyz \leqq 2$

【解説】 $A(4,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 4,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 4)$ とする．

$\overrightarrow{OH}=\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$ とすると，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ より H は平面 α 上であり，

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)\cdot(-4,\ 4,\ 0)=0,$$

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\left(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)\cdot(-4,\ 0,\ 4)=0$$

より $OH\perp\alpha$ なので，H は球面 S の中心から平面 α に下ろした垂線の足である．

このとき $OH=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$ より $\sqrt{6}-OH=\dfrac{3\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{54}-\sqrt{48}}{3}>0$ なので球面 S と平面 α は共有点をもつ．

また，その共有点は，平面 α 上の H を中心とする半径 $\sqrt{(\sqrt{6})^2-\left(\dfrac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ の円周上の点である．

ここで，$\vec{a}=\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$，$\vec{b}=\left(0,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ とおくと $\vec{a}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{HA}$，$\vec{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\overrightarrow{BC}$ より $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平面 α 上のベクトルで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ より，球面 S と平面 α の共有点は，$0\leqq\theta<2\pi$ を満たす実数 θ を用いて

$$\begin{aligned}(x,\ y,\ z) &= \overrightarrow{OH}+(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}\\ &= \left(\frac{4+2\cos\theta}{3},\ \frac{4-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta}{3},\ \frac{4-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}{3}\right)\end{aligned}$$

と表せる．

このとき

$$\begin{aligned}xyz &= \frac{1}{27}(4+2\cos\theta)(4-\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)(4-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)\\ &= \frac{2}{27}(\cos\theta+2)(4\cos^2\theta-8\cos\theta+13)\end{aligned}$$

となるので，$\cos\theta=t$ とおいたものを $f(t)$ とすると $f(t)=\dfrac{2}{27}(4t^3-3t+26)$ より

$f'(t)=\dfrac{8}{9}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\left(t+\dfrac{1}{2}\right)$ なので

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

t	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{50}{27}$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗	2

よって $\boldsymbol{\frac{50}{27} \leqq xyz \leqq 2}$ である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

30 空間内に四面体 ABCD を考える．このとき，4 つの頂点 A，B，C，D を同時に通る球面が存在することを示せ．

《11 京大・理系》

【答】 略

【解説】 △ABC，△ABD を含む平面をそれぞれ α，β とし，△ABC，△ABD の外心をそれぞれ P，Q とする．

点 P を通り平面 α に垂直な直線を l，点 Q を通り平面 β に垂直な直線を m とし，線分 AB の中点を M とすると，直線 l と m は，M を通り AB に垂直な平面上に存在する．

また点 D は平面 α 上にはないので，$\overrightarrow{\mathrm{MD}}$ は α と平行になることはない．つまり直線 l と直線 m は平行になることも一致することもない．

よって直線 l と直線 m はただ 1 つの交点をもつのでその点を R とすると，R は直線 l 上より RA＝RB＝RC となり，また R は直線 m 上より RA＝RB＝RD となる．

よって R は 4 点 A，B，C，D から等距離にある点なので，4 点 A，B，C，D を同時に通る球面の存在が示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　指数対数

31　x，y は $x\neq 1$，$y\neq 1$ をみたす正の数で，不等式

$$\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2)$$

をみたすとする．このとき x，y の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ．

《09 京大・理系》

【答】 略

【解説】 $\log_2 x=X$，$\log_2 y=Y$ とおくと

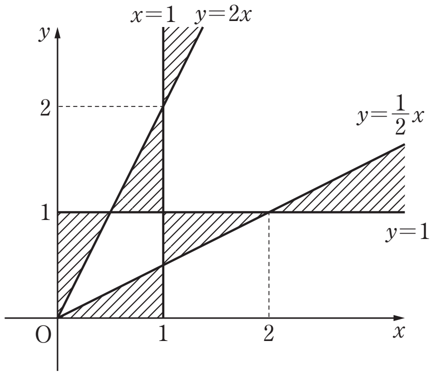
$$\begin{aligned}\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2) &\iff \frac{Y}{X}+\frac{X}{Y}>2+\frac{1}{X}\times\frac{1}{Y}\\ &\iff XY(X^2+Y^2-2XY-1)>0\\ &\iff XY(X-Y-1)(X-Y+1)>0\\ &\iff (\log_2 x)(\log_2 y)\left(\log_2\frac{x}{2y}\right)\left(\log_2\frac{2x}{y}\right)>0\end{aligned}$$

となるが，ここで $\log_2\alpha$ の符号と $\alpha-1$ の符号は一致するので

$$\begin{aligned}\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2) &\iff (x-1)(y-1)\left(\frac{x}{2y}-1\right)\left(\frac{2x}{y}-1\right)>0\\ &\iff (x-1)(y-1)(x-2y)(2x-y)>0\end{aligned}$$

となる．

よって求める範囲は下図の境界を含まない斜線部分．



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

32　0 以上の整数を 10 進法で表すとき，次の問いに答えよ．ただし，0 は 0 桁の数と考えることにする．また n は正の整数とする．

(1)　各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数を考える．それらすべての整数の総和を T_n とする．T_n を n を用いて表せ．

(2)　各桁の数が 0，1，2 のいずれかである n 桁以下の整数を考える．それらすべての整数の総和を S_n とする．S_n が T_n の 15 倍以上になるのは，n がいくつ以上のときか．必要があれば，$0.301<\log_{10}2<0.302$ および $0.477<\log_{10}3<0.478$ を用いてもよい．

《11 京大・文系》

【答】 (1)　$\dfrac{2^{n-1}(10^n-1)}{3}$　　(2)　8 以上

【解説】 (1)　各桁が 1 または 2 である n 桁の整数は

$$111\cdots111,\ 111\cdots112,\ 111\cdots121,\ 111\cdots122,\ \cdots\cdots,\ 222\cdots221,\ 222\cdots222$$

の 2^n 個ある．ここで例えば，一の位の 1 と 2 はそれぞれ 2^{n-1} 回ずつ現れる．同様に，どの位の数に注目しても，そこでは 1 と 2 がそれぞれ 2^{n-1} 回ずつ現れる．

よって求める総和は

$$\begin{aligned}(1+2)(10^{n-1}+\cdots+10+1)\times 2^{n-1} &= 3\times\frac{10^n-1}{10-1}\times 2^{n-1}\\ &= \frac{2^{n-1}(10^n-1)}{3}\end{aligned}$$

よって $T_n=\boldsymbol{\dfrac{2^{n-1}(10^n-1)}{3}}$

(2)　(1)と同様に考えると

$$\begin{aligned}S_n &= (0+1+2)(10^{n-1}+\cdots+10+1)\times 3^{n-1}\\ &= 3\times\frac{10^n-1}{10-1}\times 3^{n-1}\\ &= 3^{n-2}(10^n-1)\end{aligned}$$

となる．

S_n が T_n の 15 倍以上になるものは

$$3^{n-2}(10^n-1)\geqq\frac{2^{n-1}(10^n-1)}{3}\times 15 \iff \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\geqq 10$$

を満たす n であるが，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2}$ は底が $\dfrac{3}{2}>1$ なので n に関して増加関数で，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^5=\dfrac{243}{32}<10$，

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^6=\dfrac{729}{64}>10$ なので $n-2\geqq 6 \iff n\geqq 8$．

よって求める n は **8 以上**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

33　次の式

$$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n-1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える．

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2)　次の不等式

$$a_n{}^2-2a_n>10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であることは用いてよい．

《14 京大・文系》

【答】 (1)　$a_n=2^{n-1}+1$　　(2)　26

【解説】 (1)　$a_{n+1}=2a_n-1 \iff a_{n+1}-1=2(a_n-1)$ より $a_n-1=(a_1-1)\cdot 2^{n-1}$ よって

$\boldsymbol{a_n=2^{n-1}+1}$

(2)　$a_n{}^2-2a_n=(a_n-1)^2-1=(2^{n-1}+1-1)^2-1=2^{2(n-1)}-1$ より

$a_n{}^2-2a_n>10^{15} \iff 2^{2(n-1)}>10^{15}+1$ …①を満たす最小の n を考えればよい．

ここで，$2^{2(n-1)}$ は n に関する増加関数で

$0.3010<\log_{10}2<0.3011 \iff 10^{0.3010}<2<10^{0.3011}$ より $10^{14.4480}<2^{48}<10^{14.4528}$,

$10^{15.050}<2^{50}<10^{15.055}$ であることと

$$10^{15}<10^{15}+1<1.024\cdot 10^{15}=\frac{2^{10}}{10^3}\cdot 10^{15}=2^{10}\cdot 10^{12}<10^{3.011}\cdot 10^{12}=10^{15.011}$$ より

①を満たす n は $2(n-1)\geqq 50 \iff n\geqq 26$ となるので求める最小値は **26**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

34 $2^{10}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか.

ただし，$0.301<\log_{10}2<0.3011$ である.

《05 京大・理系》

【答】 31 個

【解説】 $0.301<\log_{10}2<0.3011$ より $10^{0.301}<2<10^{0.3011}$ …①である.

$\dfrac{5}{4}=\dfrac{10}{2^3}=10\cdot2^{-3}$ であるが，①より $10^{-0.903}>2^{-3}>10^{-0.9033}$ なので

$10^{1-0.903}>\dfrac{5}{4}>10^{1-0.9033}$ つまり $10^{0.097}>\dfrac{5}{4}>10^{0.0967}$ …②である.

ここで，①より $10^{3.010}<2^{10}<10^{3.011}$，$10^{6.020}<2^{20}<10^{6.022}$ であり，

$\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ は n に関する増加関数で②より $10^{2.9977}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^{31}<10^{3.0070}$，$10^{3.0944}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^{32}<10^{3.1040}$，

$10^{5.9954}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^{62}<10^{6.0140}$，$10^{6.0921}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^{63}<10^{6.1110}$ なので

$2^{10}<\left(\dfrac{5}{4}\right)^n<2^{20}$ を満たす自然数は $n=32$，33，…，62 の **31 個**.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　数学Ⅱの微分積分

35　α，β を実数とする．xy 平面内で，点 $(0,\ 3)$ を中心とする円 C と放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ が点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$ を共有し，さらに P における接線が一致している．このとき以下の問に答えよ．

(1)　α，β の値を求めよ．

(2)　円 C，放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

《13 京大・文系》

【答】　(1)　$\alpha=\sqrt{3}$，$\beta=2$　　(2)　$\dfrac{7}{3}\sqrt{3}-\pi$

【解説】　(1)　$\mathrm{A}(0,\ 3)$ とする．$y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ が P を通るので

$0=-1+\sqrt{3}\alpha-\beta$　　$\therefore$　$\beta=\sqrt{3}\alpha-1$

$y'=-\dfrac{2}{3}x+\alpha$ に $x=\sqrt{3}$ を代入すると $y'=\alpha-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ より P における接線の方向ベクトルは $\vec{l}=\left(1,\ \alpha-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ とおけるので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{l}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{l}=(\sqrt{3},\ -3)\cdot\left(1,\ \alpha-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=-3\alpha+3\sqrt{3}=0$．よって $\boldsymbol{\alpha=\sqrt{3}}$，$\boldsymbol{\beta=2}$

(2)　$y=-\dfrac{1}{3}x^2+\sqrt{3}x-2$ より求める面積は

$$\int_0^{\sqrt{3}}\left\{-\left(-\frac{1}{3}x^2+\sqrt{3}x-2\right)\right\}dx-\left\{(2\sqrt{3})^2\pi\times\frac{1}{12}-\frac{3\times\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$=\left[\frac{x^3}{9}-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+2x\right]_0^{\sqrt{3}}-\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{7}{3}\sqrt{3}-\pi}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

36 実数 a が変化するとき，3 次関数 $y=x^3-4x^2+6x$ と直線 $y=x+a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか．a の値によって分類せよ．

《11 京大・文系》

【答】 $\begin{cases} 1 & \left(a<\frac{50}{27},\ a>2 \text{ のとき}\right) \\ 2 & \left(a=\frac{50}{27},\ 2 \text{ のとき}\right) \\ 3 & \left(\frac{50}{27}<a<2 \text{ のとき}\right) \end{cases}$

【解説】 $x^3-4x^2+6x=x+a \iff x^3-4x^2+5x=a$ より $f(x)=x^3-4x^2+5x$ とおくとき，$y=f(x)$ と $y=a$ の共有点の個数を考えればよい．

$f'(x)=3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)$ より $f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗

となるので，求める個数は $\begin{cases} \mathbf{1} & \left(\boldsymbol{a<\frac{50}{27},\ a>2} \textbf{ のとき}\right) \\ \mathbf{2} & \left(\boldsymbol{a=\frac{50}{27},\ 2} \textbf{ のとき}\right) \\ \mathbf{3} & \left(\boldsymbol{\frac{50}{27}<a<2} \textbf{ のとき}\right) \end{cases}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

37 xy 平面上で，$y=x$ のグラフと $y=\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ．

《11 京大・理系》

【答】 $\dfrac{208}{27}$

【解説】 $\left(\dfrac{3}{4}x^2-3\right)-2=x$ かつ $\dfrac{3}{4}x^2-3\geqq 0$ より

$(3x-10)(x+2)=0$ かつ $x\leqq -2,\ x\geqq 2$ 　　$\therefore$　$x=-2,\ \dfrac{10}{3}$

$-\left(\dfrac{3}{4}x^2-3\right)-2=x$ かつ $\dfrac{3}{4}x^2-3<0$ より

$(3x-2)(x+2)=0$ かつ $-2<x<2$ 　　$\therefore$　$x=\dfrac{2}{3}$

よって求める面積は

$$\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left\{\left(\left|\frac{3}{4}x^2-3\right|-2\right)-x\right\}dx+\int_{\frac{2}{3}}^{2}\left\{x-\left(\left|\frac{3}{4}x^2-3\right|-2\right)\right\}dx+\int_{2}^{\frac{10}{3}}\left\{x-\left(\left|\frac{3}{4}x^2-3\right|-2\right)\right\}dx$$

$$=\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2-x+1\right)dx+\int_{\frac{2}{3}}^{2}\left(\frac{3}{4}x^2+x-1\right)dx+\int_{2}^{\frac{10}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2+x+5\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^{\frac{2}{3}}+\left[\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2-x\right]_{\frac{2}{3}}^{2}+\left[-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+5x\right]_{2}^{\frac{10}{3}}$$

$$=\mathbf{\frac{208}{27}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

38 t を実数とする．$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ から接線を引く．
(1) 接線がちょうど１本だけ引けるような t の範囲を求めよ．
(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき，$\mathrm{P}(1,\ t)$ から C に引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする．$S(t)$ の取りうる範囲を求めよ．
《14 京大・文系》

【答】 (1) $t<-1,\ t>0$　(2) $S(t)>\dfrac{27}{64}$

【解説】 (1) C 上の点 $(u,\ u^3-u)$ における C の接線は $y'=3x^2-1$ より
$y=(3u^2-1)(x-u)+u^3-u$　$\therefore$　$y=(3u^2-1)x-2u^3$ となり，この接線が P を通るので
$t=(3u^2-1)\cdot1-2u^3$　$\therefore$　$t=-2u^3+3u^2-1$ となる．

これを u の方程式とみて，異なる実数解 u の個数がただ１つだけとなるようなものを考えればよい．

ここで $-2u^3+3u^2-1=f(u)$ とおくと，$f'(u)=-6u^2+6u=-6u(u-1)$ より $f(u)$ の増減は

u	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(u)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(u)$	↘	-1	↗	0	↘

となるので，求める t の範囲は $\boldsymbol{t<-1,\ t>0}$．

(2)
$$t=-2u^3+3u^2-1 \iff 2u^3-3u^2+t+1=0$$
のただ１つの実数解を α とする．$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-1$ と $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ であることと $f(u)$ の増減，

そして $t<-1,\ t>0$ より α は $\alpha<-\dfrac{1}{2},\ \alpha>\dfrac{3}{2}$ であることがわかる．

$x=\alpha$ における C の接線は(1)より $y=(3\alpha^2-1)x-2\alpha^3$ となり，この接線と $y=x^3-x$ より
$$x^3-x=(3\alpha^2-1)x-2\alpha^3 \iff (x-\alpha)^2(x+2\alpha)=0 \qquad \therefore\ x=-2\alpha,\ \alpha$$
と交点の x 座標が求まる．

(I) $\alpha<-\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\alpha}^{-2\alpha}\{(3\alpha^2-1)x-2\alpha^3-(x^3-x)\}dx \\ &= \int_{\alpha}^{-2\alpha}(-x^3+3\alpha^2x-2\alpha^3)dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}\alpha^2x^2-2\alpha^3x\right]_{\alpha}^{-2\alpha}=\frac{27}{4}\alpha^4 \end{aligned}$$

となるので，$S(t)>\dfrac{27}{4}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{27}{64}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅱ)　$\alpha > \frac{3}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{-2\alpha}^{\alpha} \{(x^3 - x) - ((3\alpha^2 - 1)x - 2\alpha^3)\} dx \\ &= \int_{-2\alpha}^{\alpha} (x^3 - 3\alpha^2 x + 2\alpha^3) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}\alpha^2 x^2 + 2\alpha^3 x \right]_{-2\alpha}^{\alpha} = \frac{27}{4}\alpha^4 \end{aligned}$$

となるので，$S(t) > \frac{27}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{2187}{64}$

(Ⅰ), (Ⅱ)より求める範囲は $\boldsymbol{S(t) > \frac{27}{64}}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　数学Ⅲ ― その 1 ―

39　α, β, γ は相異なる複素数で，

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$$

を満たすとする．このとき α, β, γ の表す複素平面上の 3 点を結んで得られる三角形はどのような三角形か．（ただし，複素平面を複素数平面ともいう．）

《05 京大・理系》

【答】 重心が 0 の正三角形

【解説】 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{2}$ より $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$　…①

また $\alpha+\beta+\gamma=0$ より得られる $\gamma=-\alpha-\beta$ を①に代入すると

$\alpha\beta+(\alpha+\beta)(-\alpha-\beta)=0 \iff \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0$　…②を得る．

ここで $\alpha=0$ とすると②より $\beta^2=0$ つまり $\beta=0$ となり，$\alpha\neq\beta$ であることに矛盾．

よって $\alpha\neq 0$

よって② $\iff \left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2+\dfrac{\beta}{\alpha}+1=0$ より

$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)$ (複号同順)

また対称性より同様に $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\cos\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)$ (複号同順) を得る．

このとき β と γ は，原点 O を中心として α の点を $\pm\dfrac{2}{3}\pi$ だけ回転した点ということになるが，

$\beta\neq\gamma$ より $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\cos\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\dfrac{2}{3}\pi\right)$, $\dfrac{\beta}{\alpha}=\cos\left(\mp\dfrac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\mp\dfrac{2}{3}\pi\right)$ (複号同順)

に決まる．

よって α, β, γ の表す複素平面上の 3 点を結んで得られる三角形は**重心が 0 の正三角形**．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

40　複素数 α に対してその共役複素数を $\overline{\alpha}$ であらわす．α を実数ではない複素数とする．複素平面内の円 C が 1，-1，α を通るならば，C は $-\dfrac{1}{\alpha}$ も通ることを示せ．

《04 京大・理系》

【答】 略

【解説】 円 C の中心を β，半径を r とすると，円の式は

$$|z-\beta|=r \iff (z-\beta)(\overline{z}-\overline{\beta})=r^2$$
$$\iff z\overline{z}-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}+|\beta|^2-r^2=0$$

と表すことができる．

この円が 1，-1，α を通るので

$$1-\overline{\beta}-\beta+|\beta|^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots①$$
$$1+\overline{\beta}+\beta+|\beta|^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots②$$
$$\alpha\overline{\alpha}-\overline{\beta}\alpha-\beta\overline{\alpha}+|\beta|^2-r^2=0 \quad \cdots\cdots③$$

が成り立つ．

①と②より $\overline{\beta}+\beta=0$，$1+|\beta|^2-r^2=0$ を得るが，これと③より
$\alpha\overline{\alpha}-\overline{\beta}\alpha-\beta\overline{\alpha}-1=0$ …④

このとき $f(z)=z\overline{z}-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}+|\beta|^2-r^2$ とおくと，$1+|\beta|^2-r^2=0$ より
$f(z)=z\overline{z}-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}-1$ であるが

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{\alpha}\right) &= -\frac{1}{\alpha}\overline{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}-\overline{\beta}\left(-\frac{1}{\alpha}\right)-\beta\overline{\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}-1 \\ &= \frac{1}{\overline{\alpha}\alpha}+\frac{\overline{\beta}}{\alpha}+\frac{\beta}{\overline{\alpha}}-1 \\ &= -\frac{\alpha\overline{\alpha}-\overline{\beta}\alpha-\beta\overline{\alpha}-1}{\alpha\overline{\alpha}}=0 \quad (\because ④) \end{aligned}$$

となり，C は $-\dfrac{1}{\alpha}$ も通ることが示された．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

41 次の各問に答えよ．

(1) a が正の実数のとき $\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ．

(2) 定積分 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ．

《12 京大・理系》

【答】 (1) $\begin{cases} a & (a\geqq 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (0<a<1 \text{ のとき}) \end{cases}$　(2) $\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\log 2+\frac{\pi}{12}$

【解説】 (1) $a\geqq 1$ のとき $(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=a\left(\frac{1}{a^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}$ であるが，$1^{\frac{1}{n}}<\left(\frac{1}{a^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}\leqq 2^{\frac{1}{n}}$ と

$\lim_{n\to\infty}1^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$ より $a\left(\frac{1}{a^n}+1\right)^{\frac{1}{n}}\to a\ (n\to\infty)$

$0<a<1$ のとき $1^{\frac{1}{n}}<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}$ と $\lim_{n\to\infty}1^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}=1$ より $(1+a^n)^{\frac{1}{n}}\to 1\ (n\to\infty)$

以上より $\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=\begin{cases} \boldsymbol{a} & (\boldsymbol{a\geqq 1} \textbf{ のとき}) \\ \boldsymbol{1} & (\boldsymbol{0<a<1} \textbf{ のとき}) \end{cases}$

(2) $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log(1+x^2)dx$ に部分積分を用いると

$\frac{1}{2}\left\{\left[-\frac{1}{x}\log(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}}-\int_1^{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{2x}{1+x^2}dx\right\}=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}\log(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}}+\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$

となる．

ここで $\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x}\log(1+x^2)\right]_1^{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\log 4+\log 2\right)=\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\log 2$ であり，

$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx$ で $x=\tan\theta$ と置換積分すると

$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\left[\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{12}$ なので，

$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx=\boldsymbol{\frac{3-2\sqrt{3}}{6}\log 2+\frac{\pi}{12}}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

42

(1)　a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ.

(2)　$a_1=1$ として，$n=1,\ 2,\ \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする．このとき $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ.

《15 京大・理系》

【答】(1)　略　　(2)　1

【解説】(1)　$y=e^x+1$ より $y'=e^x$ なので，$x=t$ における $y=e^x+1$ の接線は

$$y=e^t(x-t)+(e^t+1) \qquad \therefore\quad y=e^t x+(1-t)e^t+1$$

この直線が $(a,\ 0)$ を通るとき

$$0=e^t a+(1-t)e^t+1 \iff a=-e^{-t}+t-1$$

となる．この式を t の方程式とみて，この方程式の実数解がだた 1 つだけであることを示せばよい．$f(t)=-e^{-t}+t-1$ とおくと $f'(t)=e^{-t}+1>0$ で $\lim_{t\to-\infty}f(t)=-\infty$，$\lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$ より $f(t)=a$ は任意の a に対して実数解をただ 1 つだけもつ.

よって，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つであることが示された.

(2)　(1)より $a_n=-e^{-a_{n+1}}+a_{n+1}-1 \iff a_{n+1}-a_n=1+e^{-a_{n+1}}$ が成り立つが,

$a_{n+1}-a_n=1+e^{-a_{n+1}}>1$ より $a_n>a_1+(n-1)\cdot 1=n$ となるので，$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$ つまり $\lim_{n\to\infty}e^{-a_{n+1}}=0$.

よって $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\mathbf{1}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　数学Ⅲ ―その2―

43　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ．ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい．

《13京大・理系》

【答】 $\dfrac{\sqrt{3}\,\pi^2}{16}$

【解説】 $f(x) = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ とおく．

$f(-x) = \cos(-x) + \dfrac{\sqrt{3}}{4}(-x)^2 = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2 = f(x)$ より $f(x)$ は偶関数なので

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ について考える．

$f'(x) = -\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$，$f''(x) = -\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $f'(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↘		↗	

となる．

ここで $f'(0) = 0$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi - 4}{4} > \dfrac{1.7 \times 3 - 4}{4} = \dfrac{1.1}{4} > 0$ より $f'(x) = 0$ の $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ における実数解は1つだけで，それを α とおくと $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

となる．

このとき $f(0) = 1$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{3}\,\pi^2}{16} > \dfrac{1.7 \times 3.1^2}{16} = \dfrac{16.337}{16} > 1$ である．

以上より求める最大値は $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}\,\pi^2}{16}}$ $\left(x = \pm\dfrac{\pi}{2}\right)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

44 xy 平面内で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1 : y=\sqrt{3}\log(1+x),\ C_2 : y=\sqrt{3}\log(1-x)$$

とそれぞれ点 A，点 B で接しているとする．さらに △PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする．このとき 3 つの曲線 C, C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ．ただし，2 つの曲線がある点で接するとは，その点を共有し，さらにその点において共通の接線をもつことである．

《13 京大・理系》

【答】 $8\sqrt{3}-2\sqrt{3}\log 3-\dfrac{8}{3}\pi$

【解説】 $f(x)=\sqrt{3}\log(1+x)$，$g(x)=\sqrt{3}\log(1-x)$ とおくと
$f(-x)=\sqrt{3}\log(1-x)=g(x)$ なので，C_1 と C_2 は y 軸対称なグラフをもつ．

よって $A(\alpha,\ \sqrt{3}\log(1+\alpha))$，$B(-\alpha,\ \sqrt{3}\log(1+\alpha))\ (\alpha>-1)$ とおける．

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{1+x}>0$ なので，題意より直線 PA の傾きが $-\sqrt{3}$ になればよい．

$$f'(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{3}} \iff \frac{\sqrt{3}}{1+\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore\quad \alpha=2$$

ここで AB の中点を M とすると，MA$=2$ より MP$=2\sqrt{3}$ つまり円 C の半径は 4 となるので，y 軸に関する対称性より求める面積は

$$2\left\{(\triangle\text{APM の面積})+(\text{OM と AM で作られる長方形の面積})\right.$$
$$\left.-\int_0^2\sqrt{3}\log(1+x)dx-4^2\pi\times\frac{1}{12}\right\}$$
$$=\ 2\left\{\frac{2\sqrt{3}\times 2}{2}+2\times\sqrt{3}\log 3-\sqrt{3}\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^2-\frac{4}{3}\pi\right\}$$
$$=\ \boldsymbol{8\sqrt{3}-2\sqrt{3}\log 3-\frac{8}{3}\pi}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

45 双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第1象限にある部分と，原点Oを中心とする円の第1象限にある部分を，それぞれ C_1，C_2 とする．C_1 と C_2 は2つの異なる点A，Bで交わり，点Aにおける C_1 の接線 l と線分OAのなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする．このとき C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ．

《14京大・理系》

【答】 $\dfrac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})$

【解説】 $y=\dfrac{1}{x}$ のとき $y'=-\dfrac{1}{x^2}$ より $\mathrm{A}\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$，$\mathrm{B}\left(\beta,\ \dfrac{1}{\beta}\right)$ $(0<\alpha<\beta)$ とおくと接線 l の傾きは $-\dfrac{1}{\alpha^2}$ より接線の方向ベクトルは $\vec{l}=(-\alpha^2,\ 1)$ とおけ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$ より

$$\begin{aligned}\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\vec{l}\,||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\frac{\pi}{6} &\iff -\alpha^3+\frac{1}{\alpha}=\sqrt{\alpha^4+1}\sqrt{\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\iff 2(1-\alpha^4)=\sqrt{3}(\alpha^4+1)\\ &\iff \alpha^4=(2-\sqrt{3})^2\\ &\iff \alpha^4=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^4\end{aligned}$$

となるが，$\alpha>0$ より $\alpha=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

よって $\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\beta=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ となり，

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ より，求める面積は

$$\begin{aligned}\left(2^2\pi\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\alpha\beta\right)-\left(\int_\alpha^\beta\frac{1}{x}dx+\frac{1}{2}\alpha\beta\right) &= \frac{2}{3}\pi-\Big[\log x\Big]_\alpha^\beta\\ &= \frac{2}{3}\pi-\log\frac{\beta}{\alpha}\\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}\pi-\log(2+\sqrt{3})}\end{aligned}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

46　a を正の実数とする．座標平面において曲線 $y=\sin x\,(0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，曲線 $y=a\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする．このとき $S:T=3:1$ となるような a の値を求めよ．

《10 京大・理系》

【答】 $a=\dfrac{4}{3}$

【解説】 $S=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}=2$ と $S:T=3:1$ より $T=\dfrac{2}{3}$.

これと $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$ より曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=a\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた図形の面積が $1-T=\dfrac{1}{3}$ となるので，曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と $y=a\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の共有点の x 座標を α とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}&=\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a\cos x)dx\\&=\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\\&=-a+\cos\alpha+a\sin\alpha\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで $a\cos\alpha=\sin\alpha$ かつ $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より $\tan\alpha=a$，$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+1}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ なので

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}=-a+\cos\alpha+a\sin\alpha&\iff\frac{1}{3}=-a+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+a\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\\&\iff a+\frac{1}{3}=\sqrt{a^2+1}\\&\iff a^2+\frac{2}{3}a+\frac{1}{9}=a^2+1\text{ かつ }a\geqq-\frac{1}{3}\qquad\therefore\quad a=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

よって求める a の値は $\boldsymbol{a=\dfrac{4}{3}}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 12 講　数学Ⅲ ― その 3 ―

47　2 つの関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ のグラフの $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．ただし，$x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない．

《15 京大・理系》

【答】 $\dfrac{\pi}{16}$

【解説】 $\sin 2x-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)=2\cos\left(\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\pi}{16}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{16}\right)=0$ と

$\dfrac{\pi}{16}\leqq\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\pi}{16}\leqq\dfrac{13}{16}\pi$，$-\dfrac{\pi}{16}\leqq\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{16}\leqq\dfrac{3}{16}\pi$ より $\dfrac{3}{2}x+\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{16}=0$

$\therefore\ x=\dfrac{\pi}{8}，\dfrac{7}{24}\pi$

よって求める体積は

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\pi\left[(\sin 2x)^2-\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right\}^2\right]dx &= \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\frac{\pi}{2}\left\{\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos 4x\right\}dx\\ &= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{16}}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

48 次の式で与えられる底面の半径が 2，高さが 1 の円柱 C を考える．

$$C=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 4,\ 0\leqq z\leqq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と 45° の角をなす平面のうち，点 $(0,\ 2,\ 1)$ を通るものを H とする．円柱 C を平面 H で二つに分けるとき，点 $(0,\ 2,\ 0)$ を含む方の体積を求めよ．

《08 京大・理系》

【答】 $3\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi$

【解説】 実数 t を $-\sqrt{3}\leqq t\leqq\sqrt{3}$ を満たすものとし，$\mathrm{P}(t,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{4-t^2},\ 0)$，$\mathrm{R}(t,\ \sqrt{4-t^2},\ \sqrt{4-t^2}-1)$ とするとき，題意の立体を平面 $x=t$ で切った切り口は $\triangle\mathrm{PQR}$ となるので，その面積は $\dfrac{1}{2}(\sqrt{4-t^2}-1)^2=\dfrac{1}{2}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2})$ である．

よって求める体積は

$$\begin{aligned}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{1}{2}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2})dt &= \int_0^{\sqrt{3}}(5-t^2-2\sqrt{4-t^2})dt\\ &= \left[5t-\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}-2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-t^2}\,dt\end{aligned}$$

であるが，$\left[5t-\dfrac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}=4\sqrt{3}$，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-t^2}\,dt$ については $t=2\sin\theta$ と置換積分することで

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4-t^2}\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}2|\cos\theta|\cdot 2\cos\theta\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}4\cos^2\theta\,d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}}(2+2\cos 2\theta)\,d\theta\\ &= \Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となるので，求める体積は $4\sqrt{3}-2\left(\dfrac{2}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\boldsymbol{3\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

49 n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる．各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする．どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ．

《10 京大・理系》

【答】 $\log 2-1$

【解説】 最初のボールはどこに入ってもよく，$k\ (k=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ 個目のボールは，$k-1$ 個目までのボールが入っていない箱に入ればよいので

$$p_n=\frac{2n}{2n}\times\frac{2n-1}{2n}\times\frac{2n-2}{2n}\times\cdots\times\frac{2n-(n-2)}{2n}\times\frac{2n-(n-1)}{2n}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\frac{2n-k}{2n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\log\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)\\ &= \int_0^1\log\left(1-\frac{1}{2}x\right)dx\\ &= \left[\left\{\left(1-\frac{1}{2}x\right)\log\left(1-\frac{1}{2}x\right)-\left(1-\frac{1}{2}x\right)\right\}\times(-2)\right]_0^1\\ &= \mathbf{\log 2-1}\end{aligned}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

50　極方程式 $r=1+\cos\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ． 《09 京大・理系》

【答】 4

【解説】 $x=(1+\cos\theta)\cos\theta$, $y=(1+\cos\theta)\sin\theta$ より

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cdot\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)=-(1+2\cos\theta)\sin\theta,$$

$\dfrac{dy}{d\theta}=-\sin\theta\cdot\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=(1+\cos\theta)(2\cos\theta-1)$ なので求める曲線の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta &= \int_0^{\pi}\sqrt{(1+2\cos\theta)^2\sin^2\theta+(1+\cos\theta)^2(2\cos\theta-1)^2}\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta\\ &= \int_0^{\pi}2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta\\ &= \int_0^{\pi}2\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta\\ &= \left[4\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=\mathbf{4}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。